О ВЫБОРОЧНЫХ СВОЙСТВАХ АНАЛИТИЧЕСКОГО ПОЧТИ - ПЕРИОДИЧЕСКОГО В ПОЛОСЕ (α, β) ПРОЦЕССА

ON SELECTIVE PROPERTIES OF THE ANALYTIC ALMOST - PERIODIC IN THE BAND TYPE OF A (α, β) PROCESS

01.01.05 - the Theory of Probability and Mathematical Statistics

ЛЕОНТЬЕВА Н.Г., *канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры математики Университета управления «ТИСБИ»*
E-mail: 2684218@mail.ru
АЛЬТШУЛЕР Г.В., *канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры математики Университета управления «ТИСБИ»*
E-mail: Galinaalt1@mail.ru

LEONTIEVA N., *Candidate of Physical and Mathematical sciences, PhD, the University of Management «TISBI»*
E-mail: 2684218@mail.ru
ALTSHULER G., *Candidate of Physical and Mathematical sciences, PhD, the University of Management «TISBI»*
E-mail: Galinaalt1@mail.ru

Аннотация

В данной работе рассматривается вопрос о выборочных свойствах аналитического, почти - периодического в полосе (α, β) процесса вида

$$X(\omega, s) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sqrt{A_k}\, \omega_k e^{s\lambda_k} \text{ , где } s = \sigma + it, \qquad \sigma \epsilon\, [\alpha, \beta], \qquad -\infty < t < \infty$$

Доказано, что при выполнении условий

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k\, e^{2\sigma\lambda_k} < \infty, \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k < \infty, \qquad \lambda_k = \frac{p_k}{q_k}\alpha, \qquad |q_k| < \infty,$$

где $\frac{p_k}{q_k}$ – несократимая рациональная дробь выборочные функции нашего процесса являются почти наверное:

1) непрерывными в полосе $[\alpha, \beta]$,
2) регулярными в полосе (α, β),
3) почти - периодическими функциями на прямых: $\sigma = \alpha$, $\sigma = \beta$.

При выполнении этих условий показано, что выборочные функции аналитического, почти – периодического процесса почти наверное почти - периодические функции в полосе (α, β).

Abstract

In this paper we consider the question of selective properties of analytic, almost - periodic in the band (α, β) type of process

$$X(\omega, s) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sqrt{A}_k\, \omega_k e^{s\lambda_k} \ , s = \sigma + it, \qquad \sigma \epsilon\, [\alpha, \beta], \qquad -\infty < t < \infty$$

It is proved that under the conditions

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k\, e^{2\sigma\lambda_k} < \infty, \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k < \infty, \qquad \lambda_k = \frac{p_k}{q_k}\alpha, \qquad |q_k| < \infty,$$

where $\frac{p_k}{q_k}$ - irreducible rational fraction sample functions of our process are almost surely:

1) a continuous strip [α, β];
2) regular in the strip (α, β);
3) almost - periodic functions on the line: σ = α, σ = β.

Under these conditions, it is shown that the analytical sample functions, almost - periodic process almost surely almost - periodic functions in the band (α, β).

Ключевые слова:

$X(\omega, s)$ - аналитический, почти - периодический в полосе (α, β) процесс; $X(s)$- выборочная функция аналитического, почти - периодического в полосе (α, β) процесса; $\{\omega_к\}$ - случайные, нормально распределенные с параметрами (0, 1) случайные величины; E(X) – среднее значение случайной величины X.

Key words:

X (ω, s) - analytical, almost - periodic in the band (α, β) process; X (s) - selective analytical function, almost - periodic in the band (α, β) process; $\{\omega_к\}$ - random, normally distributed with parameters (0, 1) random variables; E (X) - the mean value of the random variable X.

Пусть $X(\omega, s)$ - аналитический, почти - периодический в полосе (α, β) процесс. Известно, что разложение такого процесса имеет вид:

$$X(\omega, s) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sqrt{A}_k\, \omega_k e^{s\lambda_k} \ , \text{где } s = \sigma + it, \qquad \sigma \epsilon\, [\alpha, \beta], \qquad -\infty < t < \infty,$$

$\{\omega_к\}$ - случайные, нормально распределенные с параметрами (0, 1) величины,

$\{A_k\}$ - последовательность положительных чисел, $\{\lambda_k\}$ - последовательность действительных чисел, причем имеют место условия:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k\, e^{2\sigma\lambda_k} < \infty \qquad (1)$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k < \infty \qquad (2)$$

Известна теорема ([2] стр. 302), позволяющая перенести ряд теорем из теории почти – периодических функций действительной переменной на аналитические почти – периодические функции.

Теорема 1

Пусть функция F(s) удовлетворяет следующим условиям:

1) непрерывна в полосе $[\alpha, \beta]$,
2) регулярна в полосе (α, β),
3) на прямых: $\sigma = \alpha,\ \sigma = \beta$ F(s) - равномерная почти - периодическая функция действительной переменной t с рядом Фурье:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k\, e^{\sigma\lambda_k}\, e^{it\lambda_k}$$

При этих предположениях F(s) является почти – периодической функцией в полосе (α, β) и ее ряд Дирихле имеет вид:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k\, e^{s\lambda_k}$$

Прежде чем перейти к рассмотрению вопроса о выборочности почти – периодического процесса, докажем предварительно несколько лемм.

Лемма 1

Пусть $X(\omega, s)$ – аналитический, почти – периодический в полосе (α, β) случайный процесс. Выборочные функции такого процесса почти наверное являются непрерывными функциями в полосе $[\alpha, \beta]$.

Доказательство

Рассмотрим

$$E\{|x(s+ih) - x(s)|^2\} = \left|2\sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k\, e^{2\sigma\lambda_k} - \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k\ e^{2\sigma\lambda_k} e^{ih\lambda_k} - \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k\ e^{2\sigma\lambda_k} e^{-ih\lambda_k}\right| =$$

$$\left|2\sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k\, e^{2\sigma\lambda_k} - \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k\ e^{2\sigma\lambda_k}(e^{ih\lambda_k} - e^{-ih\lambda_k})\right|$$

$$= \left|2\sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k\, e^{2\sigma\lambda_k}(1 - cos\lambda_k h)\right| = 4\left|\sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k\, e^{2\sigma\lambda_k} sin^2\frac{\lambda_k h}{2}\right|$$

$$\leq 2\sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k\, e^{2\sigma\lambda_k}|\lambda_k h| = 2c|h|,$$

$$\text{где } c = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k\, e^{2\sigma\lambda_k}|\lambda_k| \qquad (3)$$

Покажем, что ряд (3) сходится при выполнении условий (1), (2).

Случай 1

Пусть $\lambda_k > 0$, $0 <\propto< \beta, \sigma = \alpha > 0$.

Так как $e^{(\beta-\alpha)\lambda_k} > \lambda_k(\beta - \alpha)$, то $e^{\beta\lambda_k} > \lambda_k(\beta - \alpha)\, e^{\alpha\lambda_k}$.

Умножим обе части неравенства на $A_k > 0$, а затем, суммируя по индексу k , получим

$$\frac{1}{\beta-\alpha}\sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k\, e^{\beta\lambda_k} > \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k\,\lambda_k e^{\propto\lambda_k}$$

Пусть $\sigma = \beta$, рассмотрим $e^{2\beta\lambda_k} = e^{\beta\lambda_k} e^{\beta\lambda_k} > \beta\lambda_k e^{\beta\lambda_k}$.

Тогда $\frac{1}{\beta} e^{2\beta\lambda_k} > \lambda_k e^{\beta\lambda_k}$, или

$$\frac{1}{\beta}\sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k\, e^{2\beta\lambda_k} > \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k\,\lambda_k e^{\beta\lambda_k}$$

В силу условия (1) ряд

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k\,\lambda_k e^{\beta\lambda_k} \quad - \text{сходится.}$$

Аналогично можно показать, что ряд

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k\,\lambda_k e^{\lambda_k\sigma} < \infty \; - \text{ так же сходится при } \forall\sigma\epsilon[\alpha,\beta].$$

Случай 2

Пусть $\lambda_k < 0$. Положив $\lambda_k = \mu_k$, где $\mu_k > 0$, получаем доказательства, аналогичные предыдущим. Следовательно, ряд (3) сходится $\forall\sigma\epsilon[\alpha,\beta]$ и

$$E\{|x(s+ih) - x(s)|^2\} \le 2c|h| = \psi^2(h).$$

Так как

$$\int_0^1 \frac{\psi(h)}{h\sqrt{lnh^{-1}}}dh < \infty, \qquad \text{что легко проверить,} \qquad \text{положив } lnh^{-1} = t^2,$$

то по теореме X.Fernique [2] имеем, что почти наверное выборочные функции

$$X(s) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sqrt{A_k}\,\omega_k e^{\lambda_k s},\;\; s = \sigma + it$$

суть непрерывные функции в полосе $[\alpha,\beta]$. Рассмотрим вопрос о регулярности выборочных функций процесса $X(\omega, s)$.

Лемма 2. Выборочные функции

$$X(s) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sqrt{A_k}\,\omega_k e^{\lambda_k s},\;\; s = \sigma + it, \sigma\epsilon[\alpha,\beta], \qquad -\infty < t < \infty$$

почти наверное являются регулярными функциями в полосе (α,β).

Доказательство

Пусть задан аналитический, почти – периодический в (α, β) случайный процесс:

$X(\omega, s) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sqrt{A_k}\, \omega_k e^{\lambda_k s}$, $s = \sigma + it$.

Из [3] следует, что ковариация

$R(v + iu) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k\ e^{\lambda_k(\sigma+\sigma')} e^{i\lambda_k(t-t')}$, $u = t - t'$, $v = \sigma + \sigma'$

нашего процесса есть аналитическая, почти – периодическая в полосе (α, β) функция.

Ю.К. Беляев в своей работе [4] показал, что если ковариация $R(v + iu)$ есть аналитическая в полосе (α, β) функция, то выборочные функции

$$X(s) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sqrt{A_k}\, \omega_k e^{\lambda_k s},\ \ s = \sigma + it$$

почти наверное являются регулярными функциями в полосе $\propto < Imz < \beta$, где z = v+iu. Из предыдущей леммы следует, что

$$X(s) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sqrt{A_k}\, \omega_k e^{\lambda_k s}$$

почти наверное непрерывны в полосе (α, β). Выборочные функции нашего процесса регулярны в полосе $\propto < Imz < \beta$ и удовлетворяют условиям принципа симметрии Коши-Шварца об аналитическом продолжении функции f(z) (в случае, когда граница прямая линия), получаем, что выборочные функции

$$X(s) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sqrt{A_k}\, \omega_k e^{\lambda_k s},\ \ s = \sigma + it$$

почти наверное регулярные функции в полосе (α, β).

Лемма 3

Выборочные функции

$$X(s) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sqrt{A_k}\, \omega_k e^{\lambda_k s},\ \ s = \sigma + it$$

почти наверное равномерные почти – периодические функции на прямых $\sigma = \alpha,\ \sigma = \beta$

при условии, что

$$\lambda_k = \frac{p_k}{q_k}\alpha, \qquad |q_k| \le c < \infty, \qquad (4)$$

где $\frac{p_k}{q_k}$ - несократимая рациональная дробь.

Доказательство.

В силу леммы 1 выборочные функции

$$X(s) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sqrt{A_k}\, \omega_k e^{\lambda_k s},\ \ s = \sigma + it$$

почти наверное непрерывные функции в полосе $[\alpha, \beta]$ и, следовательно, в силу ограниченности показателей Фурье λ_k, они почти наверное являются равномерными периодическими, а тем более равномерными почти – периодическими функциями на прямых $\sigma = \alpha,\ \sigma = \beta$.

Сформулируем следующую теорему:

Теорема 2

Выборочные функции аналитического, почти – периодического процесса почти наверное почти – периодические функции в полосе (α, β), если имеют место условия (1), (2).

Доказательство

В силу лемм 1 и 2 выборочные функции

$$X(s) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sqrt{A_k}\, \omega_k e^{\lambda_k s},\ \ s = \sigma + it$$

почти наверное непрерывны в полосе $[\alpha, \beta]$ и почти наверное регулярны в полосе (α, β). Так как $\lambda_k = \frac{p_k}{q_k}\alpha,\ |q_k| \le c < \infty$, то по лемме 3 они почти наверное равномерные почти – периодические функции на прямых $\sigma = \alpha$, $\sigma = \beta$. Поэтому по теореме 1

$X(s) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sqrt{A_k}\, \omega_k e^{\lambda_k s},\ \ s = \sigma + it$

- почти наверное аналитические, почти – периодические функции в полосе (α, β).

Литература:

1. Левитан Б.М. Почти – периодические функции. – М.: Гос. изд-во технико-теоретической лит-ры, 1962.
2. Fernique X. Continite des processes Gaussian. C.R. Acad. Sci. - Paris, 258 (1964). - Pp. 6058-6060.
3. Альтшулер Г.В., Леонтьева Н.Г. Аналитические, почти – периодические в полосе (α, β) кривые в гильбертовом пространстве // Вестник «ТИСБИ». - 2014. - № 1.
4. Беляев Ю.К. Аналитические случайные процессы. Теория вероятностей и ее применение. - Вып. № 4, 1969.

References:

1. Levitan B. Almost - periodic functions. State publishing technical and theoretical literature. – M., 1962.
2. Fernique X. Continite des processes Gaussian. C.R. Acad. Sci, Paris, 258 (1964). - Pp. 6058-6060.
3. Altshuler G., Leontieva N. Analytical, almost - periodic in the (α, β) band curves in Hilbert space, TISBI Bulletin, №1, 2014.
4. Belyaev J. Analytical random processes. Probability theory and its application, IV, Issue 4, 1969.